□ 근과 계수와의 관계를 이용한 개념 확장 및 ω에 대한 해석

Ⅰ. 목 표

방정식의 풀이에서 허근과 관련지어 자주 출제되는 문제(논점) 중의 하나가 ω에 대한 유형이다. 이 파트에서는 ω의 성질과 이것과 관련 지어 확인해야 할 사항에 대해 알아본다.

Ⅱ. 취 지

방정식을 풀 때 기본이 되는 도구 중에 하나가 바로 근과 계수와의 관계이다. 그렇지만 단순히 근과 계수와의 관계의 공식만을 암기하는 것이 아니고 그것이 어떠한 의미를 가지는 지에 대해 충분히 이해해야 할 필요가 있다. 7차 교육과정에서는 수학 10-가, 10-나 파트가 단독 출제되지 않는다. 이는 10-가/나 파트가 수1, 수2에 포함되어 문제의 조건화로만 이용된다는 의미이고, 따라서 큰 논점보다는 오히려 기본이 되는 논점을 이해하는 데 초점을 맞추어야 한다는 것이다. 이 중에 이 근과 계수와의 관계는 모든 방정식에 적용될 수 있는 위력적인 주제인 만큼 각 논리의 구조를 통해 이것이 의미하는 바를 이해해보도록 하자.

※ 기본적인 근과 계수와의 관계에서 알 수 있는 바를 먼저 살펴보자.

※ 근과 계수와의 관계

1. 이차방정식의 경우

$ax^2+bx+c=0$ 에서 두근을 α, β라 할 때,

① 두 근의 합 = $\alpha+\beta$ = $-\dfrac{b}{a}$

② 두 근의 곱 = $\alpha\beta$ = $\dfrac{c}{a}$

2. 삼차 방정식의 경우

$ax^3+bx^2+cx+d=0$에서 세 근을 α, β, γ라 할 때,

① 세 근의 합 = $\alpha+\beta+\gamma$ = $-\dfrac{b}{a}$

② 세 근을 두 개씩 짝지은 것끼리의 합 = $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ = $\dfrac{c}{a}$

③ 세 근의 곱 = $\alpha\beta\gamma$ = $-\dfrac{d}{a}$

cf) 이하 확장(일반화) 가능!!

○ 특징(판별식 /근의 공식 과 적용범위 비교)

비 고	근의 공식	근과 계수와의 관계	판별식
적용범위	계수에 무관(실수 또는 허수)	계수에 무관(실수 또는 허수)	· 원칙 : 계수가 실수일때만 적용 · 예외 : 중근의 조건을 요구할 때(판별식 D=0)는 계수 불문하고 적용가능
이 유	※ 근과 계수와의 관계는 근의 공식으로부터 유도되기 때문에 계수가 허수이더라도 적용할 수 있다. 반면에 판별식은 원칙적으로 계수가 허수일 때는 적용되지 못한다. ※ 편별식을 적용하기 위한 계수의 범위($ax^2+bx+c=0$) - 판별식 $D=b^2-4ac$인데, 이는 근의 공식의 한 부분을 이루는 루트 안의 식이다. 따라서 보통 루트 안의 값이 양수가 되면 루트 앞의 $\pm$의 부호가 의미가 있게 되어 서로 다른 두 실근을 얻을 수 있고, 0이 되면 부호의 의미가 없어져 중근을 갖게 되며, 음의 값을 가지면 허수가 되고 $\pm$의 부호가 의미가 있게 되어 서로 다른 두 허근을 갖게 된다. ○ 원칙의 논의(계수가 실수일 때만 적용된다.) 위에서 논의했던 부호의 의미는 루트안의 식의 값인 D에 의해 좌우되는데 D는 그 이차방정식의 계수의 연산($D=b^2-4ac$)으로 이루어진 식이다. 따라서 우리가 위의 결론을 이끌어 내기 위해서는 전제조건으로 D의 값이 실수가 되어야 한다는 점을 떠올릴 수 있을 것이다. ○ 예외의 논의(중근을 가질 때는 계수에 무관하게 적용된다.) 계수가 허수라도 계수의 연산 결과는 0이 될 수 있다. 따라서 예외적으로 문제에서 중근을 갖는다는 조건이 나왔을 때는 계수의 실수, 허수 여부를 묻지 않고도 판별식을 적용하여 원하는 변형을 이끌어 낼 수 있다.		

※ 실제 시험에서의 쓰임에 대한 논의
- 근과 계수와의 관계 또한 그 자체를 묻는 유형의 문제는 나오지 않는다고 봐야 할 것이다. 그러나 이 개념이 중요하다고 강조되는 이유는 요구하는 바를 얻기 위해 조건을 변형할 때 자주 쓰이기 때문이다.

1) 근과 계수와의 관계를 이용/ 주요 문제 개념 확장

○ 기본 유형

< 기본 전제 개념 > 실수와 유리수는 나눗셈에 대해 닫혀있다.	
◦ 켤레 무리수의 대표적인 특징 ① 두 켤레 무리수의 합은 항상 유리수이다. ② 두 켤레 무리수의 곱의 항상 유리수이다.	◦ 켤레 복소수의 대표적인 특징 ① 두 켤레 복소수의 합은 항상 실수이다. ② 두 켤레 복소수의 곱의 항상 실수이다.

1.(문제에서의 조건) **계수가 모두 실수이고, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 허근이 $\alpha+\beta i$**

sol) 근과 계수의 관계를 적용하면,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 인데, 방정식의 계수인 a, b, c가 모두 실수 이므로 실수는 나눗셈에 대해 닫혀있다는 사실을 고려하면 두 근의 곱과 합 또한 실수가 된다는 것을 알 수 있다.
따라서 한 허근이 $\alpha+\beta i$이라면 나머지 한 근은 그것의 켤레($\alpha-\beta i$)가 되어야 한다.

2. (문제에서의 조건) **계수가 모두 유리수이고, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 무리근이 $\alpha+\beta\sqrt{m}$**

sol) 근과 계수의 관계를 적용하면,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 인데, 방정식의 계수인 a, b, c가 모두 유리수 이므로 유리수는 나눗셈에 대해 닫혀있다는 사실을 고려하면 두 근의 곱과 합 또한 실수가 된다는 것을 알 수 있다.
따라서 한 무리근이 $\alpha+\beta\sqrt{m}$이라면 나머지 한 근은 그것의 켤레($\alpha-\beta\sqrt{m}$)가 되어야 한다.

○ 응용 유형(삼차 방정식으로 확장)

1.(문제에서의 조건) 계수가 모두 실수이고, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 허근이 $\alpha+\beta i$

sol) 근과 계수의 관계를 적용하면,

① 세 근의 합 = $\alpha+\beta+\gamma$ = $-\frac{b}{a}$

② 세 근을 두 개씩 짝지은 것끼리의 합 = $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ = $\frac{c}{a}$

③ 세 근의 곱 = $\alpha\beta\gamma$ = $-\frac{d}{a}$

인데, 방정식의 계수인 a, b, c, d 가 모두 실수 이므로 실수는 나눗셈에 대해 닫혀있다는 사실을 고려하면 두 근(세근)끼리의 곱과 합 등의 ①~③의 계산이 모두 실수가 되기 위해서는 세근 중 한 근이 복소수인 $\alpha+\beta i$이라면 나머지 한 근은 그것의 켤레($\alpha-\beta i$)가 되어야 한다.
그리고 세근의 곱이 실수가 되어야 하므로 마지막 남은 근은 실근(γ)가 되어야 한다.

2. (문제에서의 조건) 계수가 모두 유리수이고, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 무리근이 $\alpha+\beta\sqrt{m}$

sol) 근과 계수의 관계를 적용하면,

① 세 근의 합 = $\alpha+\beta+\gamma$ = $-\frac{b}{a}$

② 세 근을 두 개씩 짝지은 것끼리의 합 = $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ = $\frac{c}{a}$

③ 세 근의 곱 = $\alpha\beta\gamma$ = $-\frac{d}{a}$

방정식의 계수인 a, b, c, d 가 모두 유리수 이므로 유리수는 나눗셈에 대해 닫혀있다는 사실을 고려하면 두 근(세근)끼리의 곱과 합 등의 ①~③의 계산이 모두 유리수가 되기 위해서는 세근 중 한 근이 무리수인 $\alpha+\beta\sqrt{m}$이라면 나머지 한 근은 그것의 켤레($\alpha-\beta\sqrt{m}$)가 되어야 한다.
그리고 세근의 곱이 유리수가 되어야 하므로 마지막 남은 근은 유리근(γ)이 되어야 한다.

※ 실전에서의 적용(요 약)

구분	문제에서 주어진 조건	조건에서 얻어내야 하는 바	목 적
기본형	계수가 모두 실수이고, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 허근이 $\alpha+\beta i$	나머지 한 근 => $\alpha-\beta i$	※ 주어진 조건에서 남은 근들을 확정함으로써 근과 계수와의 관계를 이용하여 미지수 등을 구해내어 방정식을 완성시킬 수 있다. 즉 미지수를 줄여줌으로써 우리가 풀 수 있는 형태로 바꾸어 갈 수 있다.
	계수가 모두 유리수이고, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 무리근이 $\alpha+\beta\sqrt{m}$	나머지 한 근 => $\alpha-\beta\sqrt{m}$	
확장형	계수가 모두 실수이고, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 허근이 $\alpha+\beta i$	나머지 두 근 => $\alpha-\beta i$, 실근(γ)	
	계수가 모두 유리수이고, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 한 무리근이 $\alpha+\beta\sqrt{m}$	나머지 두 근 => $\alpha-\beta\sqrt{m}$, 유리근(γ)	

2) 근과 계수와의 관계를 이용한 ω에 대한 해석

※ 위 내용이 근거가 되어 ω에 대한 조건들을 추출해 낼 수 있다. 이 부분에서의 조건 분석 내용은 출제 빈도가 상당히 높으며, 각종 문제에서 기본 조건으로 제시될 수 있는 부분이므로 반드시 숙지해야 한다.

1.(문제조건) $x^2+x+1=0$을 만족하는 한 허근이 ω다.

○ 아래의 모든 내용을 단순히 암기하는 방법보다 문제에 조건이 제시되었을 때,
아래의 모든 내용이 머릿속에서 바로바로 나올 정도로 숙달을 해놔야 한다.
주의할 점은 무조건 암기하기 보다 하나하나 그 의미를 파악할 수 있어야 한다.
즉, <u>문제 조건의 변형에서 얻어낸 조건으로부터 얻을 수 있는 효과까지 이해하는 것이</u>
이 파트의 목표다.

※ 조건의 분석(변형)으로부터 얻어낼 수 있는 <u>내용</u>과 그 <u>의미(효과)</u>

① 앞의 1)유형의 원리를 이용 즉, 근과 계수와의 관계를 이용하면 $x^2+x+1=0$의 모든 계수가 실수이므로 나머지 한 근은 ω의 켤레 복소수인 $\overline{\omega}$(오메가 바)임을 알 수 있다.

<=> <u>$x^2+x+1=0$의 두 허근은 ω, $\overline{\omega}$다.</u>

(효과) 수학 문제를 푸는 과정에서 조건을 식으로 추출해야 할 때가 있다.
이때 모르는 값을 미지수로 지정하게 되는데,
앞에서 언급하였듯이 <u>미지수는 최대한 적게, 구체적으로 정해야</u> 한다.
따라서 ①의 정리는 나머지 한 근을 단순히 모르는 미지수로 놓지 않고
<u>켤레근이라는 의미</u>로 구체화하였다는데 의미가 있다.

② 그렇다면 바로 ①의 두 근으로 직접 근과 계수와의 관계를 이용하여 조건이 되는 식을 얻어낼 수 있다.

<=> 두근의 합과 곱 : <u>$\omega+\overline{\omega}=-1 \cap \omega\cdot\overline{\omega}=1$</u>

(효과) 주어진 조건으로부터 미지수에 관한 조건의 식(합, 곱)을 얻어낼 수 있다.

③ 근을 방정식에 대입하면 등호가 만족한다.

<=> ω를 대입하면 <u>$\omega^2+\omega+1=0$</u>

<=> $\overline{\omega}$를 대입하면 <u>$\overline{\omega^2}+\overline{\omega}+1=0$</u>

(효과) <u>규칙성을 발견</u>하여 복잡한 식을 간단하게 <u>변형할 수 있는 도구</u>이다.

(ex) $\omega^{2006}+\omega^{2005}+.......+\omega+1=\omega^{2004}(\omega^2+\omega+1)+\omega^{2001}(\omega^2+\omega+1)+....+(\omega^2+\omega+1)=0$

또한 고차항을 일차의 항으로 <u>차수를 낮춰줄 수 있다</u>.

(ex) $\omega^2=-\omega-1$

$\omega^3=-\omega^2-\omega=-(-\omega-1)-1=\omega$

$\omega^4=\omega^2=-\omega-1$

$\omega^5=-\omega^2-\omega=-(-\omega-1)-1=\omega$

....

(앞장에 이어서) 1.(문제조건) $x^2+x+1=0$을 만족하는 한 허근이 ω다.

④ 위의 ③에서 얻은 식의 양변을 ω로 나누어 변형해보자.
그 결과 주어진 식은

<=> $\omega+\frac{1}{\omega}=-1$ ∩ $\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=-1$

(효과) 이 조건은 자체로서 의미를 갖는 변형이라기 보다 개별적인 계산 문제에서 자주 쓰이는 형태이기 때문에 따로 반드시 숙지해야 한다. 보통 다음의 내용과 연관지어 출제된다.

(ex) 곱셈공식 변형의 내용

$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ 나 $(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$ 같은 곱셈공식이 위력적인 이유는 일반적으로 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+b^2+2ab$ 공식은 전체적인 꼴로 보았을 때 $a+b,\ a^2+b^2,\ ab$ 세 가지 미지수를 갖고 있지만 위와 같이 a와 b가 역수 관계에 있게 되면 $a+b,\ a^2+b^2$ 두 가지의 미지수만을 갖기 때문에 실전에서 중요한 포인트가 될 수 있다.

④의 조건 또한 역수 관계의 식으로 이런 장점을 갖는다.

⑤ 곱셈공식 중 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 과 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 을 이용하면,
조건에서 주어진 식의 양변에 $x-1$을 곱해주면, $(x-1)(x^2+x+1)=x^3+1=0$을 만족한다.

(확인) 여기서 다시 ①의 개념을 확인해보자,
삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω일 때,
계수가 모두 실수이므로 나머지 두 근은 $\overline{\omega}$, α(실근)임을 알 수 있다.
물론 α값은 1이다.(인수분해 결과 $(x-1)(x^2+x+1)=x^3+1=0$)

따라서 위의 방정식의 해에서 역시 ω, $\overline{\omega}$가 포함되어 있으므로, ②와 같이 대입하면 등식이 만족한다.

<=> $\omega^3=1$ ∩ $\overline{\omega^3}=1$

<효과> ω의 성질 중 가장 대표적인 조건으로
높은 차수로 이루어진 ω의 식의 값을 구해낼 수 있다.(차수를 낮추어 줌)

(ex) $\omega^{2006}=(\omega^3)^{669}=1$
$(\overline{\omega})^{2007}=((\overline{\omega})^3)^{669}\cdot\overline{\omega}=\overline{\omega}$

⑥ 이차 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이 ω와 $\overline{\omega}$이므로 이를 직접 근의 공식을 이용해서 구할 수 있다.

<=> ($\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ∩ $\overline{\omega}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$) ∪ ($\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ∩ $\overline{\omega}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$) 임을 알 수 있다.

⑦ 위의 식 ⑥에서 참고로(계산 과정으로부터) 알 수 있는 내용

<=> $\omega^2=\overline{\omega}$ ∪ $\overline{\omega^2}=\omega$