매니퓰레이터 자코비안(Jacobian)

KITECH 양광웅 작성
Page365@gmail.com

말단장치가 목표점에 도달하기 위하여 이동해야 할 변화량을 계산할 때, 위치에 대한 변화량은 단순히 목표 위치에서 현재 위치를 빼는 것으로 계산할 수 있다. 하지만 말단장치의 오일러각도에 대한 변화량은 목표 자세에서 현재 자세를 빼는 것으로 계산할 수 없다.

Analytic Jacobian 의 계산

말단 장치의 오일러 자세각(ϕ,θ,ψ)에 대한 회전 속도($\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi}$)는 기준좌표계($x,y,z$)에 대한 각속도 벡터($\omega_x,\omega_y,\omega_z$)와 서로 다른 값을 갖는다. 즉, 말단부의 각속도를 $\boldsymbol{\omega_e} = \omega_x\hat{i}+\omega_y\hat{j}+\omega_z\hat{k} = \hat{\dot{\phi}}+\hat{\dot{\theta}}+\hat{\dot{\psi}}$ 와 같이 서로 다른 좌표 축 성분으로 분해할 수 있다. 이에 따른 자코비안도 각속도 성분에 따라 Geometric Jacobian($\boldsymbol{J}$)과 Analytic Jacobian($\boldsymbol{J_A}$)으로 구분된다. 6자유도 매니퓰레이터의 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{J}]\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [\ \mathbf{J}\ ] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{J_A}]\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = [\mathbf{J_A}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

보통 말단 장치의 궤적을 플래닝을 할 때 오일러 자세각이 편리하므로 말단부 자세에 대한 역기구학을 풀기 위해서는 자세각에 대한 조인트 회전속도의 관계를 나타내는 Orientation 자코비안($\mathbf{J_{RPY}}$)이 필요하다. Geometric Jacobian에서 구한 Orientation Jacobian $\mathbf{Jo}$를 자세각 속도에 대한 자코비안 $\mathbf{J_{RPY}}$로 변환함으로써 Analytic Jacobian을 결정할 수 있다.

한편, 오일러 각이 $\psi(z)\rightarrow\theta(y')\rightarrow\phi(x'')$ 의 변환 순서를 따르는 경우, 기준좌표계에 대한 각속도 성분 ($\omega_x,\omega_y,\omega_z$)와 오일러 자세각($\phi,\theta,\psi$)의 회전속도 성분 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\text{For } \dot{\psi}: \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

For $\dot{\theta}$: $\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$

For $\dot{\phi}$: $\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\psi) \cdot \mathbf{R}_y(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

이것을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{T_{RPY}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

따라서 Geometric Jacobian의 $\mathbf{Jo}$ 는 Anlytic Jacobian의 $\mathbf{J_{RPY}}$ 와 다음 관계식을 갖는다.

$$\mathbf{Jo(q) = T_{RPY} J_{RPY}(q)}$$
$$\mathbf{J_{RPY}(q) = T_{RPY}^{-1} Jo(q)}$$

최종적으로 Analytic Jacobian 은 다음 식으로 계산된다.

$$\mathbf{J_A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp} \\ \mathbf{J_{RPY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp} \\ \mathbf{T_{RPY}^{-1} Jo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T_{RPY}^{-1}} \end{bmatrix} \mathbf{J}$$